ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE

# 1985

# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3 HEURES**



N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.

I

On considère l'équation différentielle linéaire

(E) $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$

On appelle solution de (E) sur un intervalle I une fonction continûment dérivable sur I vérifiant en tout point x de I l'équation (E).

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E), sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.

2. Intégrer (E) sur chacun des trois intervalles précédents. (Pour chercher une primitive de fonction du type

$$x \longmapsto \frac{1}{x}\sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$$

(a, b, c, d réels), on pourra utiliser la nouvelle variable $u = \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}}$).

3. Déterminer par les résultats du 2. les solutions de (E) sur $]-\infty, 4[$.
On précisera la valeur de la dérivée d'une telle solution au point $x = 0$.

## II

1. a. Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière. Quelles relations doit-il exister entre ses coefficients pour que y soit solution de l'équation (E) ? Calculer alors $a_n$. On note f(x) la fonction définie par cette série entière.

   b. Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

2. a. Donner en utilisant les résultats de la partie I l'expression de f(x) sur $]-R, +R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

   b. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} \qquad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{C_{2n}^n} \qquad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{C_{2n}^n} \qquad D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{C_{4n}^{2n}}$$

(On note $C_n^p$ le coefficient du binôme égal à $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$).

## III

On considère la suite de terme général

$$v_n = \frac{4^n}{\sqrt{n}\, C_{2n}^n} \qquad (n \geqslant 1)$$

a. Déterminer la nature de la série de terme général

$$w_n = \mathrm{Log}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$ (Log désigne le logarithme népérien),

en calculant un équivalent de $w_n$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que la suite $(v_n)$ a une limite finie non nulle, notée $\ell$, que l'on ne demande pas de calculer.

c. Donner un équivalent de $C_{2n}^r$ quand $n \longrightarrow +\infty$, en utilisant le résultat précédent.

## IV

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$. Une particule ponctuelle M se déplace à chaque étape en suivant la règle : si à la $n^{ième}$ étape $(n \in \mathbb{N})$ M se trouve au point de coordonnées (x,y), alors à la $(n+1)^{ième}$ étape M a quatre positions possibles équiprobables qui sont les points de coordonnées (x, y+1), (x, y-1), (x+1, y), (x-1, y) (correspondant à "un pas vers l'Est, l'Ouest, le Nord ou le Sud" respectivement). A l'étape initiale (n = 0), la particule M se trouve à l'origine O.
Les différentes étapes sont supposées indépendantes.
On appelle $u_n$ la probabilité pour qu'à l'issue de la $n^{ième}$ étape la particule M se trouve à l'origine O.

1. a. Donner la valeur de $u_{2n+1}$.

   b. Calculer $u_{2n}$. (Si au cours des 2n étapes, il y a k pas vers l'Est, chercher le nombre de pas dans les autres directions . On utilisera, après l'avoir démontrée, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n).$$

2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge, en utilisant III.c.